

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
 – ETAPA LOCALĂ –**

08.02.2026

CLASA a X-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: - Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului precizat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu.

Subiectul I (20 puncte)

Să se arate că:

- a) $\log_2 5 + \log_5 2 > \log_2 5 \cdot \log_5 4$;
- b) $(\log_6 12 - \log_{12} 24)^{-1} \in (8; 10)$.

Soluție:

a) Aplicând inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică pentru numerele reale pozitive și distincte $\log_2 5$ și $\log_5 2$, rezultă că

$$\frac{\log_2 5 + \log_5 2}{2} > \sqrt{\log_2 5 \cdot \log_5 2} = \sqrt{\log_2 5 \cdot \frac{1}{\log_2 5}} = 1,$$

de unde deducem că $\log_2 5 + \log_5 2 > 2$. Pe de altă parte,

$$\log_2 5 \cdot \log_5 4 = 2 \cdot \log_2 5 \cdot \log_5 2 = 2 \cdot \log_2 5 \cdot \frac{1}{\log_2 5} = 2.$$

Concluzionăm că $\log_2 5 + \log_5 2 > 2 = \log_2 5 \cdot \log_5 4$.

$$\begin{aligned} \text{b) Avem că } (\log_6 12 - \log_{12} 24)^{-1} &= (\log_6 (6 \cdot 2) - \log_{12} (12 \cdot 2))^{-1} = \\ &= (1 + \log_6 2 - 1 - \log_{12} 2)^{-1} = \left(\frac{1}{\log_2 6} - \frac{1}{\log_2 12} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{1 + \log_2 3} - \frac{1}{2 + \log_2 3} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Notând $\log_2 3 = a$, avem că

$$(\log_6 12 - \log_{12} 24)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{1+a} - \frac{1}{2+a}} = (a+1)(a+2).$$

Deoarece $\sqrt{8} < 3 < \sqrt[3]{32}$, rezultă că $\log_2 \sqrt{8} < \log_2 3 < \log_2 \sqrt[3]{32}$, deci $\frac{3}{2} < a < \frac{5}{3}$.

Atunci $\frac{5}{2} < a + 1 < \frac{8}{3}$ și $\frac{7}{2} < a + 2 < \frac{11}{3}$, iar prin înmulțire rezultă că are loc inegalitatea

$$\frac{35}{4} < (a + 1)(a + 2) < \frac{88}{9}.$$

Cum $8 < \frac{35}{4}$ și $\frac{88}{9} < 10$, concluzionăm că

$$(\log_6 12 - \log_{12} 24)^{-1} = (a + 1)(a + 2) \in (8; 10).$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Aplică inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică și deduce că $\log_2 5 + \log_5 2 > 2$	4p
Calculează $\log_2 5 \cdot \log_5 4 = 2$ și deduce concluzia	3p
b) Notează $\log_2 3 = a$ și obține prin schimbare de bază că $(\log_6 12 - \log_{12} 24)^{-1} = (a + 1)(a + 2)$	4p
Observă că $\sqrt{8} < 3 < \sqrt[3]{32}$ și rezultă că $\frac{3}{2} < a < \frac{5}{3}$	5p
Arată că $\frac{5}{2} < a + 1 < \frac{8}{3}$ și $\frac{7}{2} < a + 2 < \frac{11}{3}$, de unde prin înmulțire obține că $\frac{35}{4} < (a + 1)(a + 2) < \frac{88}{9}$, de unde concluzia	4p
Total	20p

Subiectul II (20 puncte)

Fie n număr natural, $n \geq 3$ și $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ cu $[a_1] = [a_2] = \dots = [a_n] = 4$.

Să se arate că

$$\log_{a_1}(9a_2 - 20) + \log_{a_2}(9a_3 - 20) + \dots + \log_{a_n}(9a_1 - 20) \geq 2n.$$

Soluție:

Cum $[a_i] = 4$, avem că $4 \leq a_i < 5$, deci $a_i - 4 \geq 0$ și $a_i - 5 < 0$,

iar prin înmulțire rezultă că $(a_i - 4)(a_i - 5) \leq 0, \forall i = \overline{1, n}$.

Atunci $a_i^2 - 9a_i + 20 \leq 0$, de unde $a_i^2 \leq 9a_i - 20, \forall i = \overline{1, n}$.

Cum $a_i > 1$ și $a_i^2 \leq 9a_i - 20$, avem că

$$\begin{aligned} & \log_{a_1}(9a_2 - 20) + \log_{a_2}(9a_3 - 20) + \dots + \log_{a_n}(9a_1 - 20) \geq \\ & \geq \log_{a_1} a_2^2 + \log_{a_2} a_3^2 + \dots + \log_{a_n} a_1^2 = 2 \left(\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \dots + \log_{a_n} a_1 \right). \end{aligned}$$

Aplicând inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică pentru numerele pozitive

$\log_{a_1} a_2, \log_{a_2} a_3, \dots, \log_{a_n} a_1$, găsim că

$$\begin{aligned} & \frac{\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \dots + \log_{a_n} a_1}{n} \geq \sqrt[n]{\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \dots \cdot \log_{a_n} a_1} = \\ & = \sqrt[n]{\frac{\ln a_2}{\ln a_1} \cdot \frac{\ln a_3}{\ln a_2} \cdot \dots \cdot \frac{\ln a_1}{\ln a_n}} = 1, \end{aligned}$$

deci $\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \dots + \log_{a_n} a_1 \geq n$.

Concluzionăm că

$$\begin{aligned} & \log_{a_1}(9a_2 - 20) + \log_{a_2}(9a_3 - 20) + \dots + \log_{a_n}(9a_1 - 20) \geq \\ & \geq 2 \left(\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \dots + \log_{a_n} a_1 \right) \geq 2n. \end{aligned}$$



Detalii de rezolvare	Barem asociat
Deduce că $4 \leq a_i < 5, \forall i = \overline{1, n}$	1p
Argumentează că $(a_i - 4)(a_i - 5) \leq 0, \forall i = \overline{1, n}$	2p
Arată că $a_i^2 \leq 9a_i - 20, \forall i = \overline{1, n}$	3p
Deduce că $\log_{a_1}(9a_2 - 20) + \log_{a_2}(9a_3 - 20) + \dots + \log_{a_n}(9a_1 - 20) \geq$ $2 \left(\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \dots + \log_{a_n} a_1 \right)$	4p
Aplică inegalitatea mediilor și deduce că $\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \dots + \log_{a_n} a_1 \geq n$	5p
Concluzionează că $\log_{a_1}(9a_2 - 20) + \log_{a_2}(9a_3 - 20) + \dots + \log_{a_n}(9a_1 - 20) \geq$ $\geq 2 \left(\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \dots + \log_{a_n} a_1 \right) \geq 2n$	5p
Total	20p

Subiectul III (25 puncte)

Să se determine funcțiile $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$f(f(n+1)) = f(f(n)+1) = n+4053, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Soluție:

Fie $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $f(n_1) = f(n_2)$. Atunci și $f(n_1)+1 = f(n_2)+1$, deci $f(f(n_1)+1) = f(f(n_2)+1)$, de unde rezultă că $n_1+4053 = n_2+4053$. Așadar, $n_1 = n_2$, deci funcția f este injectivă.

Cum f este injectivă și $f(f(n+1)) = f(f(n)+1)$, rezultă că $f(n+1) = f(n)+1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Înlocuind succesiv în această relație $n-1, n-2, n-3, \dots, 0$, avem că $f(n) = f(n-1)+1 = f(n-2)+1+1 = f(n-3)+1+1+1 = \dots =$
 $= f(0) + \underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ ori}},$

deci $f(n) = f(0) + n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Atunci $n+4053 = f(f(n)+1) = f(0) + f(n) + 1 = f(0) + f(0) + n + 1$, de unde rezultă că $f(0) = 2026$, deci $f(n) = n + 2026$, care verifică ecuația inițială.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Arată că f este injectivă	5p
Deduce că $f(n+1) = f(n)+1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$	5p
Deduce că $f(n) = f(0) + n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$	5p
Deduce că $f(0) = 2026$	5p
Concluzionează că $f(n) = n + 2026$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$	5p
Total	25p

Subiectul IV (25 puncte)

Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ și $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$. Să se arate că

$$|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3| = 4.$$

Soluție:

Cum $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, rezultă că $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$, $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$, $\bar{z}_3 = \frac{1}{z_3}$. Atunci

$$\begin{aligned} & |z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3| = \\ & = \left| (z_1 + z_2 + z_3) \left(\underbrace{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}_{=0} - z_1z_2 - z_2z_3 - z_3z_1 \right) \right| = \\ & = |z_1 + z_2 + z_3| \cdot |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1| = |z_1 + z_2 + z_3| \cdot \left| z_1z_2z_3 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right) \right| = \\ & = |z_1 + z_2 + z_3| \cdot \underbrace{|z_1|}_{=1} \cdot \underbrace{|z_2|}_{=1} \cdot \underbrace{|z_3|}_{=1} \cdot |\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3| = |z_1 + z_2 + z_3| \cdot |\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3| = \\ & = |z_1 + z_2 + z_3|^2. \end{aligned}$$

Dar,

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 + z_3|^2 & = |(z_1 + z_2 + z_3)^2| = \left| \underbrace{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}_{=0} + 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) \right| = \\ & = 2|z_1 + z_2 + z_3| \end{aligned}$$

și cum $|z_1 + z_2 + z_3| \neq 0$, rezultă că $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$.

Atunci $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3| = |z_1 + z_2 + z_3|^2 = 2^2 = 4$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Deduce că $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$, $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$, $\bar{z}_3 = \frac{1}{z_3}$	5p
Scrie $ z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3 =$ $= \left (z_1 + z_2 + z_3) \left(\underbrace{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}_{=0} - z_1z_2 - z_2z_3 - z_3z_1 \right) \right $	5p
Deduce că $ z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3 = z_1 + z_2 + z_3 ^2$	5p
Calculează $ z_1 + z_2 + z_3 = 2$	5p
Concluzionează că $ z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3 = z_1 + z_2 + z_3 ^2 = 2^2 = 4$	5p
Total	25p